

MA3701 - Optimización**12 de Septiembre 2012****Control 1**Profesor: *Jorge Amaya*Auxiliares: *Franco Basso, Ignacio Correa, Luis Fredes*

- P1.** (a) **[4 pts]** Escriba un modelo de Programación Lineal para determinar una dieta que contenga al menos 0,5 % de calcio pero no más de 1,2 % del mismo, al menos 22 % de proteínas y al menos 5 % de fibra cruda. Los ingredientes son caliza, maíz y soya. Los aportes (en kg), por cada kg de ingrediente, son:

Ingrediente	Calcio	Proteínas	Fibra
Caliza	0,35	0	0
Maiz	0,001	0,09	0,02
Soya	0,002	0,5	0,08

Existen dos escenarios posibles para los costos (\$/kg)

	Caliza	Maiz	Soya
Escenario A	0,016	0,046	0,125
Escenario B	0,018	0,045	0,126

Se debe minimizar el costo en el escenario más desfavorable.

- (b) **[2 pts]** Sea $V(c) = \max\{c^T x / Ax \leq b, x \geq 0\}$. Demuestre que V es convexa.

- P2.** (a) **[3 pts]** Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:
- (1) $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x > 0$
 - (2) $A^T u \geq c, u \geq 0$

- (b) **[3 pts]** Determine los puntos y direcciones extremas del poliedro definido por:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

- P3.** (a) **[3 pts]** Demuestre que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$$

Para esto, escriba KKT para el problema no lineal $\max\{\prod_{j=1}^n x_j : \sum_{j=1}^n x_j = k, x_i \geq 0\}$ y luego demuestre que la solución es $\bar{x}_i = k/n, i = 1, \dots, n$.

- (b) **[3 pts]** Sean $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ funciones derivables. Considere el siguiente problema de minimización:

$$(P) \quad \min \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x_i) : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

- (i) **[1.5 pts]** Argumente la existencia de solución de (P) .
- (ii) **[1.5 pts]** Si \bar{x} es solución de (P) demuestre que existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f'_i(\bar{x}_i) \geq \bar{\lambda}, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{y} \quad (f'_i(\bar{x}_i) - \bar{\lambda})\bar{x}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$